NÚMEROS DE LIOUVILLE

FERNANDO FERREIRA

Definição 1. *Um* número de Liouville *é um número real θ tal que, para todo o natural n, existem $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \geqslant 2$, tais que*

$$0 < \left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^n}.$$

Vamos dar um exemplo dum número de Liouville. Seja $\theta := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k!}}$. É óbvio que esta série converge pois o seu termo geral é menor ou igual ao termo geral da série geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Para ver que θ, assim definido, é um número de Liouville, considere-se um número natural n. Tomem-se $a := 2^{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k!}}$ e $b := 2^{n!}$. É claro que a e b são inteiros e $b \geqslant 2$. Vem:

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| = \theta - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k!}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k!}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(n+1+i)!}}.$$

Para $i \geqslant 1$, $(n+1+i)! = (n+1+i)(n+i)! > (1+i)(n+1)! > (n+1)! + i$. Logo,

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(n+1)!+i}} = \frac{1}{2^{(n+1)!}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{(n+1)!-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n!\,n}} = \frac{1}{b^n},$$

pois é fácil de ver que $n!\,n \leqslant (n+1)! - 1$. Como se queria.

Nesta secção vamos demonstrar que todos os números de Liouville são transcendentes. Em particular, o número considerado acima $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k!}}$ é um número transcendente.

Lema 1. *Todo o número de Liouville é irracional.*

Demonstração. Por definição, para todo o número natural n, existem $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$, com $b_n \geqslant 2$, tais que $0 < \left|\theta - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{b_n^n}$. Vamos argumentar que o conjunto dos números racionais da forma $\frac{a_n}{b_n}$ é infinito. Com efeito, se este conjunto fosse finito, então haveria uma subsucessão de pares (a_{n_k}, b_{n_k}) de (a_n, b_n) tal que todos os valores $\frac{a_{n_k}}{b_{n_k}}$ são o mesmo. Seja $x \in \mathbb{Q}$ o valor comum mencionado, i.e., $x = \frac{a_{n_k}}{b_{n_k}}$, para todo o natural k. Vem, para todo k,

$$0 < |\theta - x| = \left|\theta - \frac{a_{n_k}}{b_{n_k}}\right| < \frac{1}{b_{n_k}^{n_k}} \leqslant \frac{1}{2^{n_k}} \xrightarrow[k]{} 0$$

o que é absurdo.

Assim, para um número infinito de racionais da forma $\frac{a_n}{b_n}$, tem-se $\left|\theta - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{b_n^n} \leqslant \frac{1}{b_n^2}$. Por um resultado duma seção anterior, conclui-se que θ é um número irracional. $\square$

Teorema (Teorema do afastamento de Liouville)**.** *Seja $\theta \in \mathbb{R}$ um número irracional algébrico de grau n. Então existe um real positivo δ tal que*

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| > \frac{\delta}{b^n},$$

para todos $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Dado que θ é um número algébrico irracional de grau n, sabemos que existe um polinómio irredutível $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ de grau n, com $n > 1$, tal que $P(\theta) = 0$. Tome-se $M \geqslant 1$ tal que $|P'(x)| < M$ para todo $x \in [\theta - 1, \theta + 1]$. Vamos ver que o resultado do teorema é verdadeiro com $\delta = \frac{1}{M}$.

Considerem-se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$ e, sem perda de generalidade, suponhamos que $|\theta - \frac{a}{b}| \leqslant 1$. Pelo teorema do valor médio de Lagrange, existe um número real x entre θ e $\frac{a}{b}$ tal que

$$P(\theta) - P\left(\frac{a}{b}\right) = P'(x)\left(\theta - \frac{a}{b}\right).$$

Como $P(\theta) = 0$, tem-se

$$\left|P\left(\frac{a}{b}\right)\right| < M\left|\theta - \frac{a}{b}\right|.$$

É claro que o valor $b^n|P(\frac{a}{b})|$ é um inteiro não negativo. Além disso, não é 0, pois $P(\frac{a}{b}) \neq 0$ (note-se que $P(X)$ é um polinómio irredutível de $\mathbb{Q}[X]$ de grau maior do que 1). Vem:

$$1 \leqslant b^n\left|P\left(\frac{a}{b}\right)\right| < Mb^n\left|\theta - \frac{a}{b}\right|$$

e, portanto,

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| > \frac{1}{M}\frac{1}{b^n} = \frac{\delta}{b^n}.$$

□

Note-se que, com este teorema, pode-se argumentar facilmente a terceira proposição da secção "Equações de Thue".

Corolário 1. *Todo o número de Liouville é transcendente.*

Demonstração. Já vimos que todo o número de Liouville é irracional. Logo, basta mostrar que nenhum número irracional algébrico é um número de Liouville. Seja então θ um número irracional algébrico. Seja n o seu grau. Pelo teorema de Liouville, existe um número real positivo δ tal que $\left|\theta - \frac{a}{b}\right| > \frac{\delta}{b^n}$, para todos $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$. Tome-se r um número natural suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^r} \leqslant \delta$. Vem, para todos $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$ ($b \geqslant 2$),

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| > \frac{\delta}{b^n} \geqslant \frac{1}{b^n}\frac{1}{2^r} \geqslant \frac{1}{b^n}\frac{1}{b^r} = \frac{1}{b^{n+r}}.$$

Logo, θ não é um número de Liouville. □